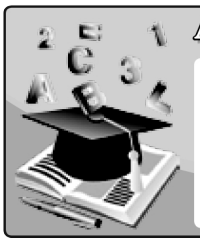
Índice

- Razones trigonométricas de ángulos agudos.....5
- Propiedades de las razones trigonométricas de ángulos agudos.....16
- Resolución de triángulos rectángulos.....25
- Geometría analítica.....35
- Ecuación general de la recta.....46
- Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal I.....57
- Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal II.....67
- Reducción al primer cuadrante I.....77
- Reducción al primer cuadrante II.....86
- Circunferencia trigonométrica.....96
- Identidades trigonométricas I.....108
- Identidades trigonométricas auxiliares.....117
- Identidades trigonométricas de ángulos compuestos.....126
- Identidades trigonométricas auxiliares de ángulos compuestos.....136
- Identidades trigonométricas del ángulo doble I.....145
- Identidades trigonométricas auxiliares del ángulo doble II.....153
- Identidades trigonométricas del ángulo mitad.....162
- Identidades trigonométricas del ángulo triple.....171
- Transformaciones trigonométricas I.....180
- Funciones trigonométricas I.....190
- Funciones trigonométricas II.....203
- Funciones trigonométricas inversas.....214
- Ecuaciones trigonométricas.....224

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

CAPÍTULO 1

MATEMÁTICA



Aprendizajes esperados

- Define y calcula las razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Aplica las razones trigonométricas a los triángulos rectángulos notables.

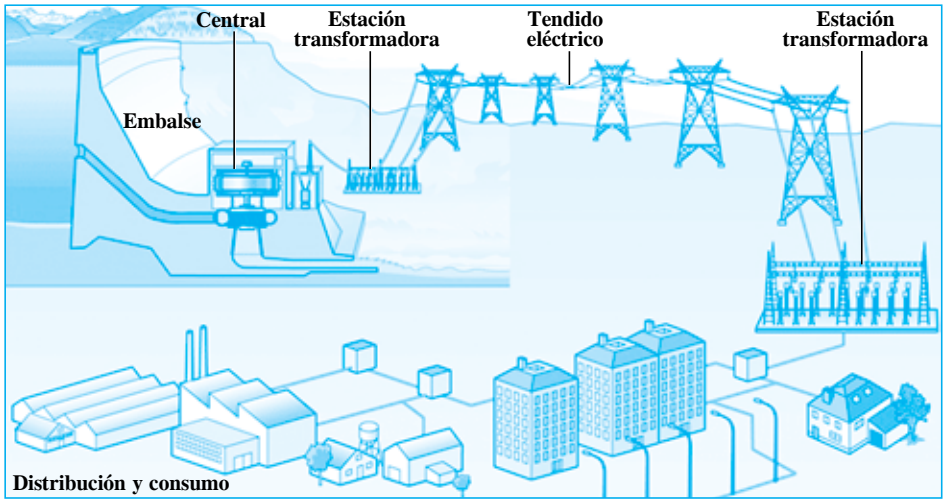
Helicocuriosidades

Aplicaciones a la trigonometría

Trigonometría, rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos, de las propiedades y aplicaciones de las razones trigonométricas de ángulos. Las dos ramas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana, que se ocupa de figuras contenidas en un plano y la trigonometría esférica, que se ocupa de triángulos que forman parte de las superficie de una esfera.

Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, como la distancia entre la Tierra y la Luna, o una distancia que no podía ser medida de forma directa. En tiempos modernos se ha aplicado en campos tan diversos como en el estudio de la corriente alterna, el procesamiento de señales en la industria telefónica, la codificación de música en reproductores de discos compactos, la determinación de las distancias a las estrellas, el diseño de sistemas de navegación en el transbordador espacial, cálculo con mucha precisión en el lanzamiento de misiles, el diseño de estructuras para los edificios, en los fenómenos meteorológicos así como en las mareas, la tomografía computarizada para usos médicos y muchos más. Es una herramienta indispensable para los ingenieros, físicos, científicos de la computación y prácticamente para todas las ciencias.

En una central hidroeléctrica se genera electricidad (corriente alterna) que llega a nuestras casas.



Responda.

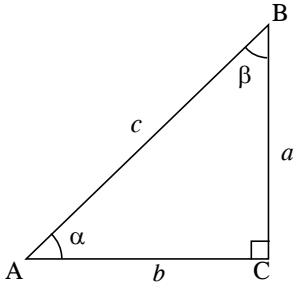
1. ¿Qué estudia la trigonometría?
2. ¿En qué campos se hicieron las primeras aplicaciones de la trigonometría?

Helicoteoría

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

Triángulo rectángulo

Consideremos a los ángulos de un triángulo rectángulo designados por A, B y C, siendo C el ángulo recto. Los lados opuestos a los ángulos se representan por a, b y c, respectivamente.



Donde

- a y b: catetos
- c: hipotenusa

Recuerda

Los ángulos agudos de un triángulo son complementarios, es decir, $\alpha+\beta=90°$.

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

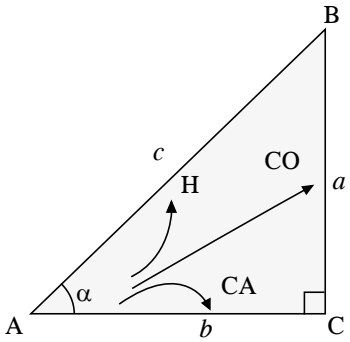
Nota

El teorema de Pitágoras será nuestro "caballito de batalla" y lo aplicaremos para calcular una distancia sean catetos o hipotenusa.

Definición de razón trigonométrica

Se define a la razón trigonométrica de un ángulo agudo como el cociente que se establece entre las medidas de dos de los lados de un triángulo rectángulo, con respecto a uno de sus ángulos agudos.

Las razones trigonométricas son: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.



CO: cateto opuesto

CA: cateto adyacente

H: hipotenusa

$\text{sen}\alpha = \dfrac{\text{Cateto opuesto al } \sphericalangle\alpha}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{CO}{H}$
$\cos\alpha = \dfrac{\text{Cateto adyacente al } \sphericalangle\alpha}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{CA}{H}$
$\tan\alpha = \dfrac{\text{Cateto opuesto al } \sphericalangle\alpha}{\text{Cateto adyacente al } \sphericalangle\alpha} = \dfrac{CO}{CA}$
$\cot\alpha = \dfrac{\text{Cateto adyacente al } \sphericalangle\alpha}{\text{Cateto opuesto al } \sphericalangle\alpha} = \dfrac{CA}{CO}$
$\sec\alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente al } \sphericalangle\alpha} = \dfrac{H}{CA}$
$\text{csc}\alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto al } \sphericalangle\alpha} = \dfrac{H}{CO}$

Observación

Las razones trigonométricas son cantidades adimensionales (sin dimensiones) y positivas.

Nota

Para la razón tangente de α se puede usar $\tan\alpha$ o $\text{tg}\alpha$.

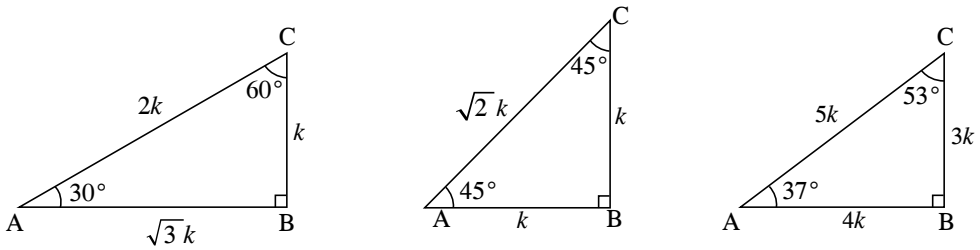
Para la razón cotangente de α se puede usar $\cot\alpha$ o $\text{ctg}\alpha$.

Observación

Conocida una razón trigonométrica de un ángulo agudo es posible calcular las demás.

Triángulos rectángulos notables

Son triángulos rectángulos cuyos ángulos agudos son 30°, 37°, 45°, 53°, 60° y se representan así



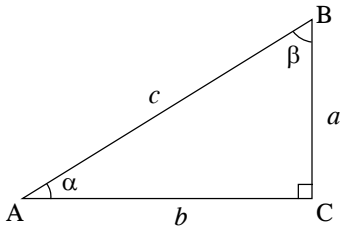
de donde obtenemos

RT \ ∢	30°	60°	45°	37°	53°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
cot	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$
sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$
csc	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$

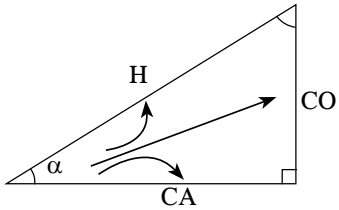
Helicosíntesis

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

se calcula en un



con respecto al ∢α



tenemos

$$\text{sen}\alpha = \frac{CO}{H}$$
$$\cos\alpha = \frac{CA}{H}$$
$$\tan\alpha = \frac{CO}{CA}$$
$$\cot\alpha = \frac{CA}{CO}$$
$$\sec\alpha = \frac{H}{CA}$$
$$\csc\alpha = \frac{H}{CO}$$

se cumple

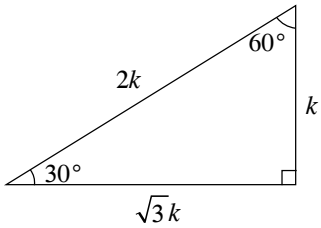
Teorema de Pitágoras

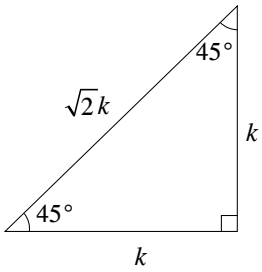
$$c^2 = a^2 + b^2$$

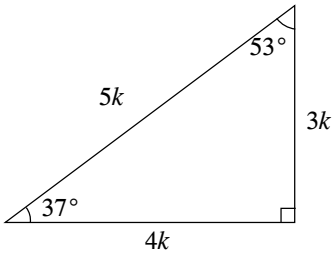
cuando

$\alpha = 30^\circ$
$\alpha = 37^\circ$
$\alpha = 45^\circ$
$\alpha = 53^\circ$
$\alpha = 60^\circ$

se tiene







Aquí nos preparamos, para servir mejor a Dios y al Hombre

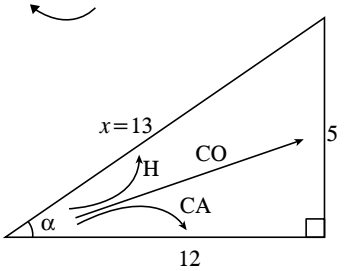
Problemas resueltos

1. Si para un ángulo agudo α se cumple que $\tan\alpha = \frac{5}{12}$, calcule las otras razones trigonométricas.

Resolución

Por condición

$$\tan\alpha = \frac{5}{12} = \frac{CO}{CA}$$



Determinamos la hipotenusa por medio del teorema de Pitágoras.

$$x^2 = 12^5 + 5^2$$

$$x^2 = 169 \rightarrow x = 13$$

Usando las definiciones

$\text{sen}\alpha = \frac{5}{13}$ $\quad \cos\alpha = \frac{12}{13}$ $\quad \tan\alpha = \frac{5}{12}$

$\csc\alpha = \frac{13}{5}$ $\quad \sec\alpha = \frac{13}{12}$ $\quad \cot\alpha = \frac{12}{5}$

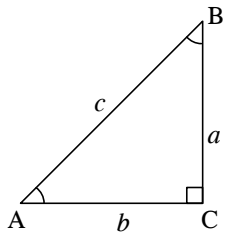
Rpta.: $\frac{5}{13}; \frac{12}{13}; \frac{5}{12}; \frac{13}{5}; \frac{13}{12}; \frac{12}{5}$

2. En un triángulo rectángulo ABC, recto en C, se cumple que

$$\text{sen}A \cdot \text{sen}B = \frac{4}{9}$$

Efectúe $E = \sqrt{\cot A + \cot B}$.

Resolución



Teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Nos piden

$$E = \sqrt{\frac{b}{a} + \frac{a}{b}}$$

$$\rightarrow E = \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{ab}}$$

Usando (*) tenemos

$$E = \sqrt{\frac{c^2}{ab}} \ldots\ldots\ldots(1)$$

De la condición

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{4}{9} \rightarrow \frac{ab}{c^2} = \frac{4}{9}$$

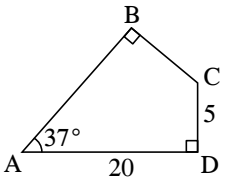
$$\rightarrow \frac{c^2}{ab} = \frac{9}{4} \ldots\ldots\ldots(2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$E = \sqrt{\frac{9}{4}} \rightarrow E = \frac{3}{2}$$

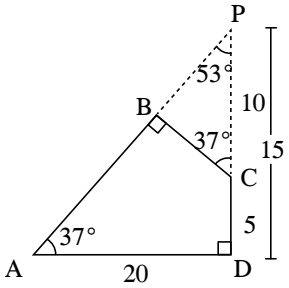
Rpta.: $\frac{3}{2}$

3. En la figura, halle BC.



Resolución

Prolongamos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ hasta que se intersequen en un punto P.



◺ ADP: Notable 37° y 53°

$$\tan 37° = \frac{DP}{20} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{DP}{20} \rightarrow DP = 15$$

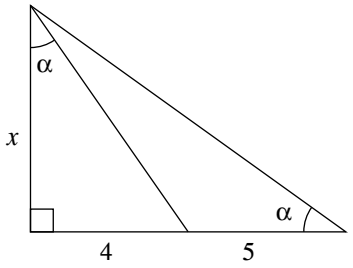
◺ CBP: Notable 37°y 53°

$$\cos 37° = \frac{BC}{10} \rightarrow \frac{4}{5} = \frac{BC}{10}$$

$$\therefore BC = 8$$

Rpta.: 8

4. Halle el valor de x.



Resolución

$$\tan\alpha = \frac{x}{9}$$

Además $\tan\alpha = \dfrac{4}{x}$

Igualando: $\dfrac{x}{9} = \dfrac{4}{x}$

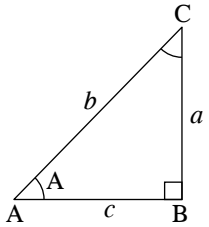
$$\therefore\ x = 6$$

Rpta.: 6

5. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, reduzca

$$\text{senA}\cdot\text{senC} + \tan C\cdot\tan A$$

Resolución



Se deduce

$\text{senA} = \dfrac{a}{b}$ $\quad \tan C = \dfrac{c}{a}$

$\text{senC} = \dfrac{b}{a}$ $\quad \tan A = \dfrac{a}{c}$

Reemplazando: $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{a}{c} = 1 + 1 = 2$

Rpta.: 2

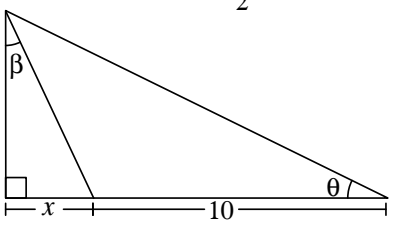
Helicopráctica

1. Si un ángulo agudo α cumple que $\tan\alpha = 0{,}333\ldots$, calcule $\sqrt{10}\sec\alpha + \dfrac{2}{3}$.

2. En un triángulo rectángulo ABC, recto en C, se cumple que $9\text{senA} + 4\cos B = 12$. Calcule $5\tan A$.

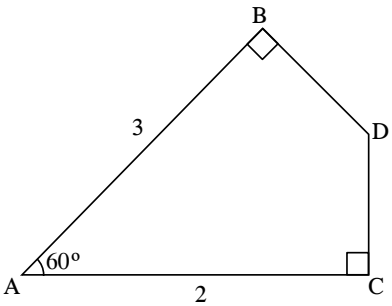
3. José adquiere como herencia un terreno en forma de triángulo; se sabe que el perímetro de dicho terreno es 180 m y el seno de uno de sus ángulos agudos es 0,6. Halle la longitud de sus catetos y calcule el área de dicho terreno.

4. Halle el valor de x si $\tan\beta = \dfrac{1}{2}$ y $\cot\theta = 3$.

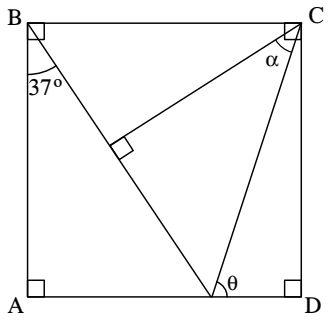


5. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, sobre el cateto AB, se toma un punto D, tal que BD = 3AD, además, $m\measuredangle CAD = m\measuredangle BCD = \theta$. Calcule $\tan\theta$.

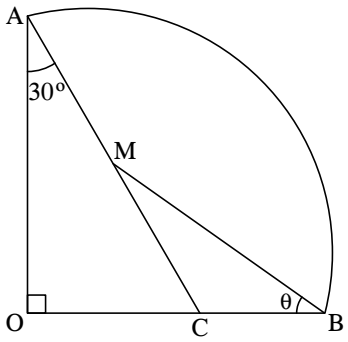
6. Del gráfico, halle la longitud del lado CD.



7. Si ABCD es un cuadrado, efectúe $I = \tan\alpha + 3\cot^2\theta$.



8. Siendo AOB un cuadrante, además M es punto medio de $\overline{AC}$, calcule $\sqrt{3}\cot\theta + 1$.



Helicotaller

Nivel I

1. Si un ángulo α cumple que $\tan\alpha = 0{,}25$; efectúe

$$M = \sqrt{17}\,(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)$$

Resolución

2. En triángulo ABC, recto en C, se cumple que $\operatorname{sen}A + \cos B = \dfrac{24}{13}$. Calcule $\cos A$.

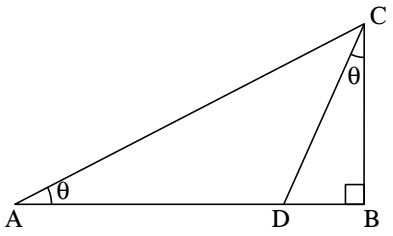
Resolución

Nivel II

3. Paty decide comprar un terreno en forma de triángulo rectángulo; se sabe que el perímetro del terreno es 60 m y que la tangente de uno de sus ángulos agudos es 0,75. Halle la longitud de sus catetos y el calcule área de dicho terreno.

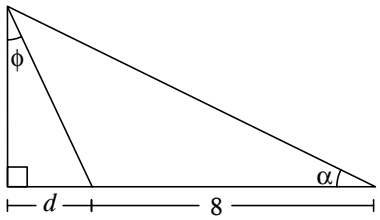
Resolución

5. De la figura, calcule tanθ si AD = 7BD.



Resolución

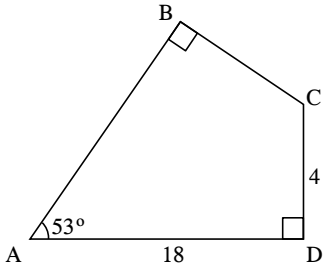
4. De la figura, halle el valor de d si $\tan\phi = \frac{2}{3}$ y $\cot\alpha = 2$.



Resolución

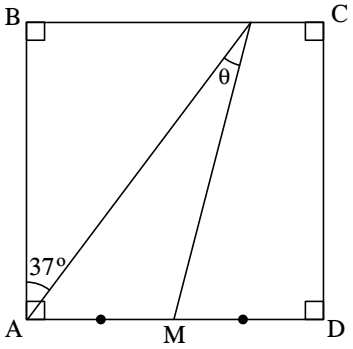
Nivel III

6. Del gráfico, halle la longitud del lado AB.



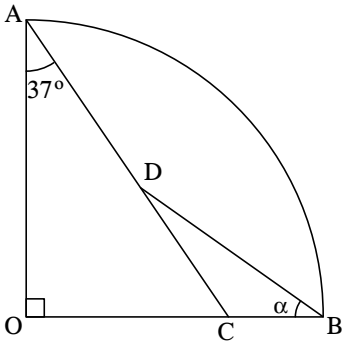
Resolución

7. Calcule $\tan\theta$ si ABCD es un cuadrado.



Resolución

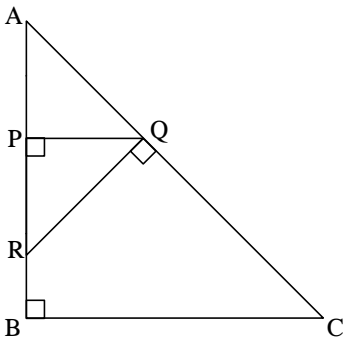
8. En el gráfico muestra un cuadrante AOB; además, AD = DC. Calcule $\tan\alpha$.



Resolución

Helicodesafío

1. En la figura mostrada, AC = 5 cm, AB = 4 cm y PR = 1,2 cm. El valor RQ, en cm, es (Ex. Admisión UNAC 2010-I bloque 2)



A) 1.

B) 2,5.

C) 2.

D) 3.

E) 1,5.

2. En un triángulo rectángulo ABC, recto en C, se cumple que $\sec A = \dfrac{\tan B}{2}$. Efectúe

$$N = \frac{\csc^2 A - 2\sec B + 1}{2 - \tan A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \sec B}$$

(Examen de Admisión UNMSM 2004-I)

A) 3 B) 1 C) 2

D) $6 - 4\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

Helicorreto

1. En un triángulo rectángulo ABC, recto en C, se cumple que $\text{sen}A \cdot \cos B = \frac{4}{9}$. Calcule $\cos A$.

A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

2. Si un ángulo agudo α cumple que $\tan\alpha = 1{,}5$, calcule $\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$.

A) $\frac{4}{13}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{5}{13}$

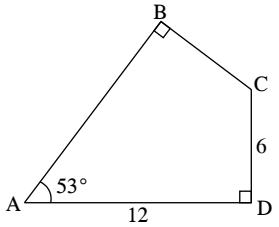
D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{6}{13}$

3. El perímetro de un triángulo rectángulo es 90 m y la tangente de uno de sus ángulos agudos es 2,4. Halle la longitud de su hipotenusa.

A) 13 m B) 39 m C) 24 m

D) 5 m E) 36 m

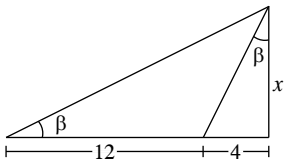
4. Del gráfico, halle la longitud del lado AB.



A) 8 B) 10 C) 16

D) 12 E) 20

5. Del gráfico, halle el valor de x.



A) 5 B) 4 C) 8

D) 3 E) 6

Helicotarea

Nivel I

1. Si para un ángulo agudo α se cumple que $\csc\alpha = 3$, efectúe

$$E = \sqrt{2}\cot\alpha + 9\,\text{sen}\,\alpha$$

A) 2 B) 5 C) 7

D) 4 E) 3

2. Si un ángulo ϕ cumple que $\cot\phi = 1{,}5$, efectúe

$$P = \sqrt{13}\sec\phi + \tan\phi$$

A) 3 B) 5 C) $\frac{13}{3}$

D) 13 E) 8

3. Reduzca la siguiente expresión:

$$E = \frac{4\text{sen}30° + \sqrt{3}\tan 60° - \cot 45°}{\cos^2 30° \cdot \cot 37°}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2

D) 3 E) 4

4. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 51 m y la tangente de uno de los ángulos agudos del triángulo es 8/15, luego el perímetro y el área de dicho triángulo son

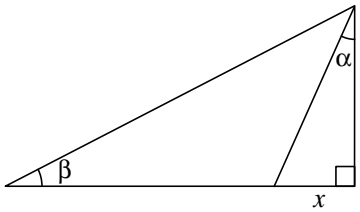
A) 100 m y 380 m^2. B) 80 m y 120 m^2.

C) 160 m y 480 m^2. D) 60 m y 180 m^2.

E) 120 m y 540 m^2.

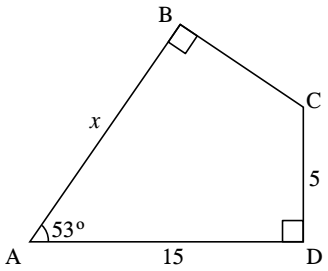
Nivel II

5. Del gráfico, halle el valor de x si $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ y $\cot\beta = \frac{5}{3}$.



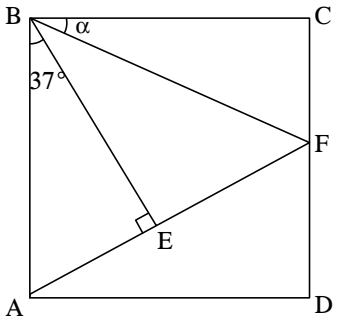
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

6. Del gráfico, halle el valor x.



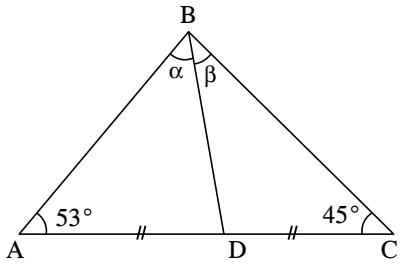
A) 13 B) 12 C) 15
D) 20 E) 25

7. Si ABCD es cuadrado, calcule $\csc^2\alpha$.



A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

8. Del gráfico, calcule $5\operatorname{sen}\alpha\cdot\csc\beta$.

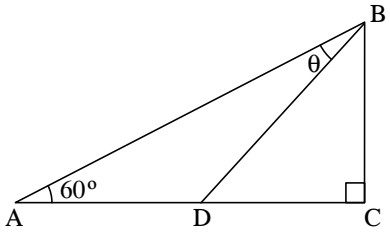


A) $5\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

Nivel III

9. En la figura, si AD = 2DC, calcule $\tan\theta$.

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{\sqrt{3}}{5}$
C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) 5
E) $\sqrt{3}$



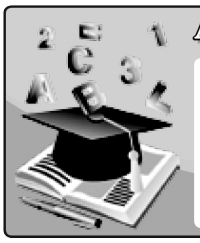
10. En un triángulo obtusángulo ABC, se cumple que AB = 3, BC = $2\sqrt{2}$ y $m\measuredangle ABC = 135°$. Calcule $\sec A\cdot\csc A$.

A) 2,5 B) 2,6 C) 2,7
D) 2,8 E) 2,9

PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

CAPÍTULO 2

MATEMÁTICA



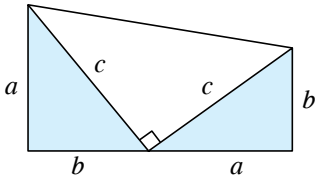
Aprendizajes esperados

- Reconoce y aplica las razones trigonométricas recíprocas.
- Reconoce y aplica las razones trigonométricas de ángulos complementarios.

Helicocuriosidades

Teorema de Pitágoras

James Abraham Garfield (1831-1881), el vigésimo presidente de EE. UU. desarrolló una demostración del teorema de Pitágoras publicada en el *New England Journal of Education*.



El polígono construido por Garfield es un trapecio de bases a y b compuesto por tres triángulos.

Garfield construye un trapecio de bases a, b y c. Dicho trapecio resulta compuesto por tres triángulos rectángulos: dos iguales al dado, y un tercero, isósceles de catetos c. En consecuencia

$$S_{\text{trapecio}} = \frac{a+b}{2} \cdot (a+b) \ldots\ldots\ldots (i)$$

como corresponde a la superficie del trapecio, pero asimismo tenemos una figura compuesta por tres triángulos, dos de ellos iguales, de modo que

$$S = 2 \cdot \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} \ldots\ldots\ldots (ii)$$

Igualando la ecuación (ii) con la (i) obtenemos

$$ab + \frac{c^2}{2} = \frac{1}{2}(a+b)(a+b)$$

Multiplicando por 2 a cada miembro y simplificando

$$2ab + c^2 = (a+b)^2$$

Expandiendo el miembro derecho

$$2ab + c^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Eliminando $2ab$ en ambos miembros, finalmente nos da

$$c^2 = a^2 + b^2$$

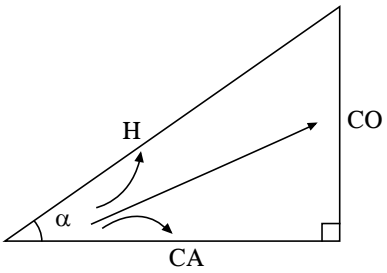
y el teorema está demostrado.

Actividad: Investigue sobre otras maneras de demostrar el teorema de Pitágoras.

Helicoteoría

PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS



Recuerda

Dos números son recíprocos cuando su producto es la unidad.

Usando las definiciones, tenemos:

$$\text{sen}\alpha = \frac{CO}{H};\ \csc\alpha = \frac{H}{CO}$$

$$\rightarrow \text{sen}\alpha \cdot \csc\alpha = \frac{CO}{H} \cdot \frac{H}{CO} \rightarrow \boxed{\text{sen}\alpha \cdot \csc\alpha = 1} \quad \begin{cases} \text{sen}\alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha} \\ \csc\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\alpha} \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{CA}{H};\ \sec\alpha = \frac{H}{CA}$$

$$\rightarrow \cos\alpha \cdot \sec\alpha = \frac{CA}{H} \cdot \frac{H}{CA} \rightarrow \boxed{\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1} \quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha} \\ \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\tan\alpha = \frac{CO}{CA};\ \cot\alpha = \frac{CA}{CO}$$

$$\rightarrow \tan\alpha \cdot \cot\alpha = \frac{CO}{CA} \cdot \frac{CA}{CO} \rightarrow \boxed{\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1} \quad \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha} \\ \cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} \end{cases}$$

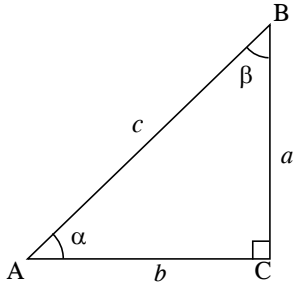
Ejemplos

- $\text{sen}20° \cdot \csc 20° = 1$
- $\cos 37° \cdot \sec 37° = 1$
- $\tan x \cdot \cot x = 1$
- Si $\tan\theta = 3 \rightarrow \cot\theta = \frac{1}{3}$
- Si $\text{sen}\beta \cdot \csc 10° = 1 \rightarrow \beta = 10°$

Observación

Si $\tan x \cdot \tan y = 1 \rightarrow x + y = 90°$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS



Se cumple $\boxed{\alpha+\beta=90°}$

Usando las definiciones, tenemos

$\text{sen}\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\beta = \frac{a}{c} \rightarrow$	$\boxed{\text{sen}\alpha = \cos\beta}$
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$; $\cot\beta = \frac{a}{b} \rightarrow$	$\boxed{\tan\alpha = \cot\beta}$
$\sec\alpha = \frac{c}{b}$; $\csc\beta = \frac{c}{b} \rightarrow$	$\boxed{\sec\alpha = \csc\beta}$

Conclusión $\boxed{\text{RT}(\alpha)=\text{Co-RT}(\beta)}$

Ejemplos

- $\text{sen}50°=\cos40°$
- $\tan10°=\cot80°$
- $\sec70°=\csc20°$
- $\text{sen}\theta=\cos(90°-\theta)$
- Si $\tan\beta=\cot75° \rightarrow \beta=15°$

Observación

A las razones trigonométricas

- seno y coseno
- tangente y cotangente
- secante y cosecante

se les llaman co-razones trigonométricas.

Helicosíntesis

PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

son

Razones trigonométricas recíprocas

tenemos

- $\text{sen}\alpha \cdot \csc\alpha = 1$
- $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$
- $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

Razones trigonométricas de ángulos complementarios

tenemos

Si $\alpha+\beta=90°$

- $\text{sen}\alpha=\cos\beta$
- $\tan\alpha=\cot\beta$
- $\sec\alpha=\csc\beta$

Problemas resueltos

1. Halle el valor del ángulo α agudo que cumple

$$\text{sen}(2\alpha+15°)\cdot\csc 65°=1$$

Resolución

$$\text{sen}(2\alpha+15°)\cdot\csc 65°=1$$

Usando la propiedad de las razones trigonométricas recíprocas

$$2\alpha+15°=65°$$
$$\rightarrow 2\alpha=50°$$
$$\therefore\ \alpha=25°$$

Rpta.: 25°

2. Si θ es un ángulo agudo, tal que

$$\cos(3\theta-20°)\cdot\sec(\theta+50°)=\frac{\tan 40°}{\cot 50°}$$

efectúe

$$E=2\text{sen}(\theta-5°)+\sqrt{2}\cos(\theta+10°)$$

Resolución

- RT de ángulos complementarios

$$\tan 40°=\cot 50°$$

- En la condición tenemos

$$\cos(3\theta-20°)\cdot\sec(\theta+50°)=1$$

- Usando RT recíprocas

$$3\theta-20°=\theta+50°$$
$$2\theta=70°$$
$$\theta=35°$$

Piden

$$E=2\text{sen}(35°-5°)+\sqrt{2}\cos(35°+10°)$$
$$E=2\text{sen}30°+\sqrt{2}\cos 45°$$
$$E=2\left(\frac{1}{2}\right)+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\therefore\ E=2$$

Rpta.: 2

3. Los ángulos α y β agudos cumplen

$$\tan(2\alpha)\cdot\cot(\beta+30°)=2\text{sen}30°\ldots\ldots(1)$$
$$\text{sen}(\beta-\theta)\cdot\sec(\theta+\alpha)=\tan 45°\ldots\ldots(2)$$

Efectúe

$$E=8\sqrt{2}\ \text{sen}(\alpha+5°)\cdot\cos(\beta+10°)$$

Resolución

- En (1)

$$\tan(2\alpha)\cdot\cot(\beta+30°)=2\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\rightarrow\ \tan(2\alpha)\cdot\cot(\beta+30°)=1$$

RT recíprocas

$$2\alpha=\beta+30°$$
$$\rightarrow 2\alpha-\beta=30°\ldots\ldots(3)$$

- En (2)

$$\text{sen}(\beta-\theta)\cdot\sec(\theta+\alpha)=1$$
$$\rightarrow\ \sec(\theta+\alpha)=\frac{1}{\text{sen}(\beta-\theta)}$$

RT recíprocas

$$\rightarrow\ \sec(\theta+\alpha)=\csc(\beta-\theta)$$

RT de ángulos complementarios

$$\theta+\alpha+\beta-\theta=90°$$
$$\rightarrow\ \alpha+\beta=90°\ldots\ldots(4)$$

- Resolviendo de (3) y (4)

$$\alpha=40°\quad\text{y}\quad\beta=50°$$

- Piden

$$E=8\sqrt{2}\,\text{sen}(40°+5°)\cdot\cos(50°+10°)$$
$$E=8\sqrt{2}\,\text{sen}45°\cdot\cos 60°$$
$$E=8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore\ E=4$$

Rpta.: 4

4. Reduzca

$$E = \frac{\cos 1^o + \cos 2^o + \cos 3^o + \ldots + \cos 89^o}{\text{sen}\, 1^o + \text{sen}\, 2^o + \text{sen}\, 3^o + \ldots + \text{sen}\, 89^o}$$

Resolución

Aplicando co-razones en el numerador

$$E = \frac{\text{sen}\, 89^o + \cancel{\text{sen}\, 88^o + \text{sen}\, 87^o} + \ldots + \text{sen}\, 1^o}{\text{sen}\, 1^o + \cancel{\text{sen}\, 2^o + \text{sen}\, 3^o} + \ldots + \text{sen}\, 89^o} = 1$$

Rpta.: 1

5. Si

$$\text{sen}(\theta+\alpha)^{\text{sen}(\theta+\alpha)} = \text{sen}45^o \ldots\ldots(1)$$

$$\tan(\theta-\alpha)\cdot\cot 10^o = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

halle el valor de θ.

Resolución

$$\text{sen}(\theta+\alpha)^{\text{sen}(\theta+\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{sen}(\theta+\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\theta+\alpha = 30^o \ldots.(1)$$

De la relación (2)

$$\theta - \alpha = 10^o \ldots.(3)$$

Juntando (1) y (3)

$$\left.\begin{array}{l} \theta+\alpha = 30^o \\ \theta-\alpha = 10^o \end{array}\right\} +$$

$$2\theta = 40^o$$

$$\therefore\ \theta = 20^o$$

Rpta.: 20°

Helicopráctica

1. La edades de Juan y Iván son m y n años, respectivamente. Si dichos valores se pueden calcular al resolver las siguientes expresiones:

- $\cos(2m+30)^\circ \cdot \sec 70^\circ = 1$
- $\tan(3n)^\circ = \cot 54^\circ$

Responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la edad de Juan e Iván?

b. ¿Cuál es la suma de ambas edades?

2. Si α es un ángulo agudo, tal que

$$\tan(45^o + 2\alpha)\cdot\cot(60^o - \alpha) = 1$$

efectúe $M = (\sec 12\alpha + \tan 9\alpha)^2$.

3. Si se cumple que $\tan 3x = \cot 2x$, calcule

$$\csc(2x-6^\circ)+\tan 45^\circ$$

4. Siendo α y β ángulos agudos, los cuales cumplen que

$$\text{sen}\alpha - \cos 2\beta = 2\text{sen}30^\circ - 1$$

$$\text{sen}\alpha\cdot\csc 4\beta = \tan 45^\circ$$

calcule $\alpha-\beta$.

5. Resuelva si $2^o < x < 70^o$.

$$(\tan 10^o)^{\text{sen}(20^o+x)} = (\cot 80^o)^{\cos(x-2)}$$

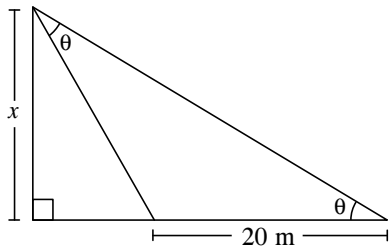
6. Si un ángulo θ es agudo y cumple que

$$\sec\theta = \frac{3\text{sen}70^\circ + \cos 20^\circ}{5\text{sen}70^\circ - 2\cos 20^\circ}$$

efectúe $E = \sqrt{7}(\tan\theta + \cot\theta)$.

7. Halle el valor de x si en el gráfico se cumple que

$$\tan(30^\circ-\theta)-\cot(30^\circ+3\theta)=0$$



8. Siendo α y β ángulos agudos que cumplen

$$\cos\alpha\cdot\csc 2\beta = 1$$

efectúe $P = \tan^2\left(\frac{2\beta+\alpha}{3}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{2\beta+\alpha}{2}\right)$.

Helicotaller

Nivel I

1. La edades de dos amigas, Julia y Vanesa, son a y b años, respectivamente. Si dichos valores se pueden calcular al resolver las siguientes expresiones:

- $\tan(5a-10)^\circ \cdot \cot 40^\circ = 1$
- $\text{sen}(2b)^\circ = \cos 50^\circ$

responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la edad de Julia y Vanesa?

b. ¿Cuántos años de diferencia se llevan?

Resolución

2. Si se cumple que $\text{sen}(3x+10^\circ)=\cos 35^\circ$, calcule $\cos 4x$.

Resolución

Nivel II

3. Halle el valor de $\text{sen}x+\cos x$ si se cumple que

$$\tan(x+18^\circ)\cdot\cot 63^\circ=\tan 53^\circ\cdot\cos^2 30^\circ$$

Resolución

4. Siendo α y β ángulos agudos, halle el valor de β sabiendo que

$$\text{sen}(7\alpha-5^\circ)-\cos(5\alpha+11^\circ) = \tan 45^\circ - 1$$

$$\tan(3\beta-\alpha)\cdot\cot(3\alpha+2^\circ)=2\text{sen}30^\circ$$

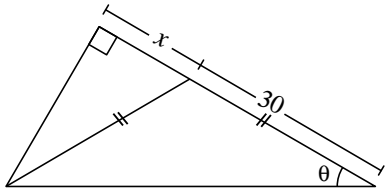
Resolución

5. Resuelva si $0° < x < 90°$

$$(\text{sen}75°)^{\tan(2x-5°)} = (\cos 15°)^{\cot(3x-25°)}$$

Resolución

7. Halle el valor de x a partir de la figura si se cumple que $\text{sen}(39° - \theta) - \cos(14° + 3\theta) = 0$



Resolución

Nivel III

6. Si θ es agudo, además

$$\tan\theta = \frac{2\,\text{sen}\,10° + \cos 80°}{5\,\text{sen}\,10° - \cos 80°}$$

calcule $10(\text{sen}\,\theta - \cos\theta)$.

Resolución

8. Siendo x e y ángulos agudos que cumplen

$$\text{sen}2x \cdot \sec y = 1$$

efectúe

$$P = \csc^2\left(\frac{2x+y}{2}\right) + \csc^2\left(\frac{2x+y}{3}\right)$$

Resolución

Helicodesafío

1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\tan(\alpha - 25^\circ) = \cot(\beta - 30^\circ)$$

$$2\beta - \alpha = 35^\circ$$

donde α y β son agudos, efectúe

$$\frac{\tan(\alpha+\beta - 25^\circ)}{1+\cos\beta}$$

(Examen de Admisión UNMSM 2007 - II)

A) $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ B) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2. Para los ángulos agudos x e y, se cumple que

$$\tan(60^\circ - x) = \tan(y+20^\circ)\cdot\cot(x+30^\circ)$$

Reduzca

$$J = \frac{\operatorname{sen}(x+y+50^\circ)\cdot\cos(20^\circ+y)}{\cos(y-x-10^\circ)}$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Helicorreto

1. Reduzca

$$E = \frac{5\cos\theta\cdot\sec\theta - 3\operatorname{sen}\theta\cdot\csc\theta}{2}$$

A) 0,5 B) 1,5 C) 1

D) 2 E) 2,5

2. Halle el valor de x si

$$\operatorname{sen}(5x+8^\circ) = \cos(x+40^\circ)$$

A) 3° B) 4° C) 5°

D) 6° E) 7°

3. Si para un ángulo x agudo se cumple que

$$\operatorname{sen}4x\cdot\sec 50^\circ = 1$$

calcule $\csc 3x + \sec^2 6x$.

A) 2 B) 4 C) 6

D) 8 E) 10

4. Siendo

$$\sec(2x+7^\circ) = \csc(3x-37^\circ)$$

determine

$$E = 4\sqrt{3}\tan(2x+12^\circ) + 3\csc(x+6^\circ)$$

A) 18 B) 16 C) 20

D) 24 E) 12

5. Si se cumplen

$$\tan(2x+y)\cdot\cot 50^\circ = 1$$

$$\operatorname{sen}(x-y) = \cos 80^\circ$$

calcule $3x-5y$.

A) 15° B) 10° C) 5°

D) 20° E) 25°

Helicotarea

Nivel I

1. Halle el valor de x si

$$\text{sen}(3x+25°)\cdot\csc(x+45°)=1$$

A) 10° B) 15° C) 25°
D) 35° E) 30°

2. Halle el valor de x si

$$\cos 2x\cdot\tan 3x\cdot\cot 3x=\text{sen}(30°+x)$$

A) 5° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 25°

3. Siendo $\text{sen}67°\cdot\csc(3x-2°)=1$, efectúe

$$F=\text{sen}(x+7°)-\cos 60°$$

A) –1 B) 0 C) 0,5
D) 1 E) 2

4. Si se cumple que

$$\text{sen}(x+20°)\cdot\csc(3x+10°)=\sec 60°-\tan 45°$$

efectúe

$$M=\frac{\text{sen}8x+\cos 10x}{\text{sen}(35°+x)}$$

A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

Nivel II

5. Siendo x e y ángulos complementarios y cumplen que

$$(\tan x)^{3m-2}=(\cot y)^{5+2m}$$

halle el valor de m.

A) 2 B) 4 C) 1
D) 0 E) 7

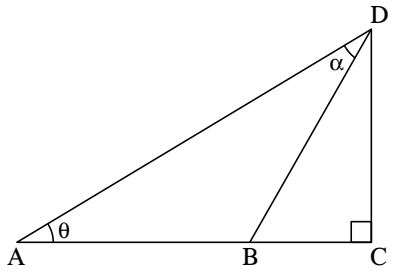
6. Si β es un ángulo agudo y cumple que

$$\cot\beta=\frac{3\,\text{sen}\,50°-\cos 40°}{\text{sen}\,50°+2\cos 40°}$$

efectúe $M=\sqrt{13}(\text{sen}\beta+\cos\beta)$.

A) 6 B) 5 C) $\frac{\sqrt{13}}{5}$
D) $2\sqrt{3}$ E) 7

7. Siendo $\sec(\alpha+20°)=\csc(\theta+33°)$, además BD=20, halle CD.



A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

8. Siendo α y θ ángulos agudos que cumplen

$$\tan 3\alpha\cdot\tan\theta=1$$

reduzca $M=\sqrt{3}\cot\left(\frac{3\alpha+\theta}{3}\right)+\sec^2\left(\frac{3\alpha+\theta}{2}\right)$.

A) 2 B) 1 C) 4
D) 5 E) 3

Nivel III

9. Siendo x y $2y$ ángulos agudos que cumplen $\text{sen}x\cdot\sec 2y=1$, reduzca

$$P=4\tan\left(\frac{x}{2}+y\right)+\frac{\sec(x+y)}{\csc y}$$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 2 E) 0

10. Si α y β son ángulos agudos complementarios, para los cuales se cumple que

$$\text{sen}\alpha=\frac{3x-1}{6x+1}\quad\text{y}\quad\cos\beta=\frac{2x+1}{6x+1}$$

calcule $\tan\alpha+\csc\beta$.

A) 1,2 B) 1,3 C) 1,4
D) 1,5 E) 1,6

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

CAPÍTULO 3

MATEMÁTICA

Aprendizajes esperados

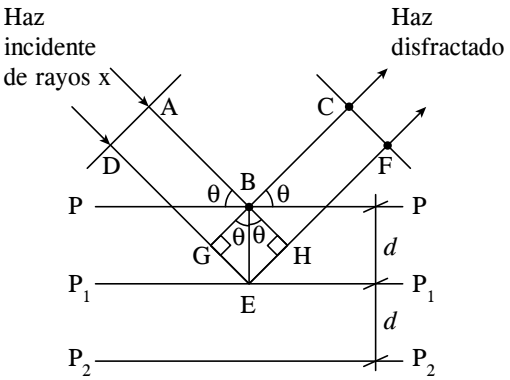
- Aplica las razones trigonométricas en la resolución de triángulos rectángulos.
- Calcula el área de una región triangular.

Helicocuriosidades

La trigonometría y el estudio de los minerales

Una explicación muy importante para un mejor estudio de los minerales es el de los rayos X y sus efectos de distracción. Esta técnica permite establecer una estructura ordenada tridimensionalmente (sistema de cristalización), estructura cuyo ordenamiento puede ser explicado mediante la utilización de razones trigonométricas.

Así del gráfico se cumple



$n\gamma$ = GE+EH, por resolución de triángulos rectángulos

$$GE = d\text{sen}\theta \text{ y } EH = d\text{sen}\theta \rightarrow n\gamma = d\text{sen}\theta + d\text{sen}\theta \therefore n\gamma = 2d\text{sen}\theta$$

donde n es el número de planos atómicos donde incide el rayo, γ es la longitud de onda del rayo y θ es el ángulo con la que inciden los rayos X.

En el gráfico se muestra una cantera de donde se está extrayendo el mineral.

Helicoteoría

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo rectángulo significa determinar sus lados y ángulos (elementos básicos).

Si en un triángulo rectángulo conocemos un ángulo agudo y uno de sus lados, podemos hallar los otros lados.

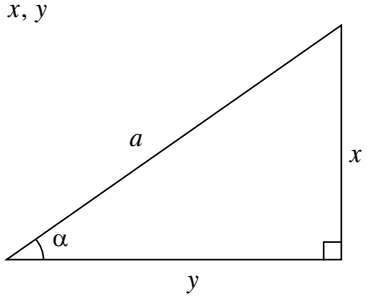
En forma práctica usaremos

$$\boxed{\frac{\text{Lado que quiero}}{\text{Lado que tengo}} = \text{RT}(\alpha)}$$

Así, tenemos tres casos:

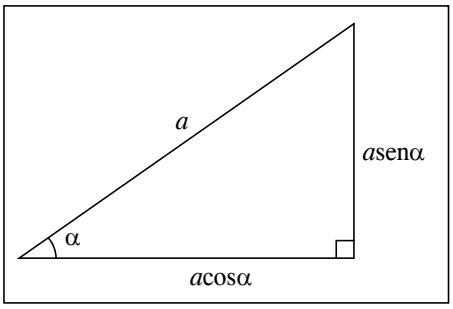
Primer caso

Datos: a, α
Incógnitas: x, y



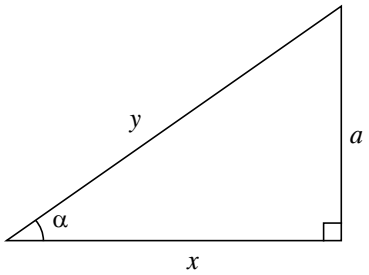
- $\frac{x}{a} = \text{sen}\alpha \rightarrow x = a\text{sen}\alpha$
- $\frac{y}{a} = \cos\alpha \rightarrow y = a\cos\alpha$

En conclusión



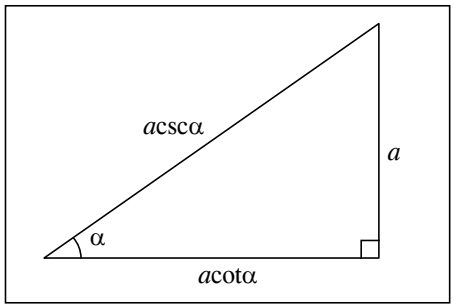
Segundo caso

Datos: a, α
Incógnitas: x, y



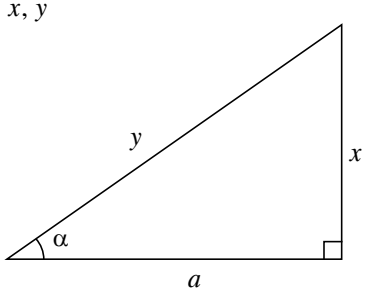
- $\frac{x}{a} = \cot\alpha \rightarrow x = a\cot\alpha$
- $\frac{y}{a} = \csc\alpha \rightarrow y = a\csc\alpha$

En conclusión



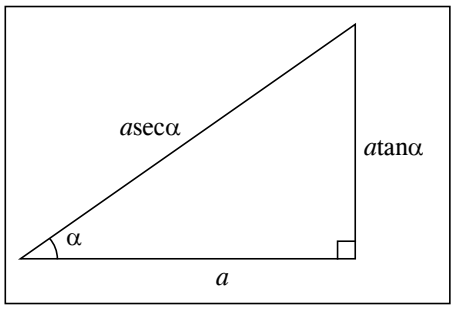
Tercer caso

Datos: a, α
Incógnitas: x, y



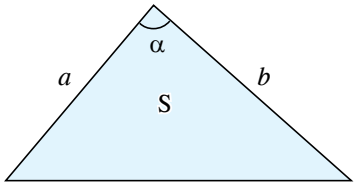
- $\frac{x}{a} = \tan\alpha \rightarrow x = a\tan\alpha$
- $\frac{y}{a} = \sec\alpha \rightarrow y = a\sec\alpha$

En conclusión



Área de una región triangular (S)

El área de una región triangular es igual al semiproducto de dos de sus lados multiplicados por el seno del ángulo que forman dichos lados.

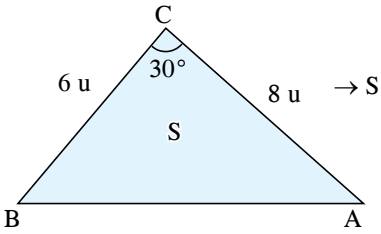


$S = \frac{ab}{2}\text{sen}\alpha$ O también $\text{sen}\alpha = \frac{2S}{ab}$

Ejemplo

Calcule el área de una región triangular ABC si AC=8 u y BC=6 u; además, m∢ACB=30°.

Resolución



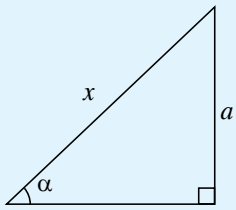
$\rightarrow S = \frac{(6\text{ u})(8\text{ u})}{2}\text{sen}30°$

$\therefore S = 12\text{ u}^2.$

Helicosíntesis

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

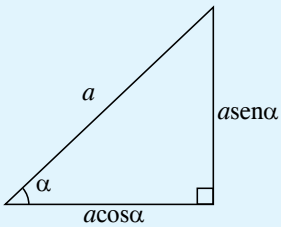
para el cálculo de *x*

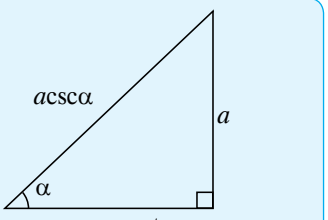


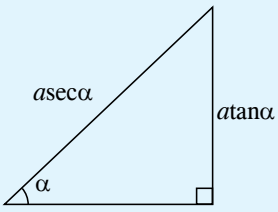
usamos

$$\frac{\text{Lado que quiero}}{\text{Lado que tengo}} = \text{RT}(\alpha)$$

así tenemos

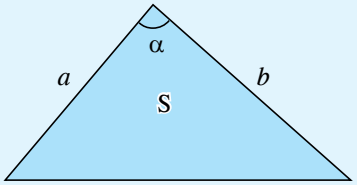






aplicación

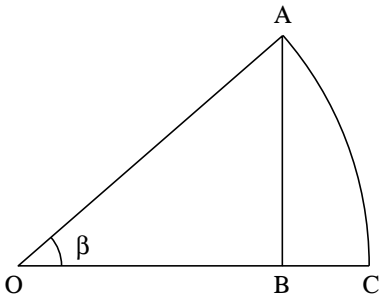
Área de una región triangular (S)



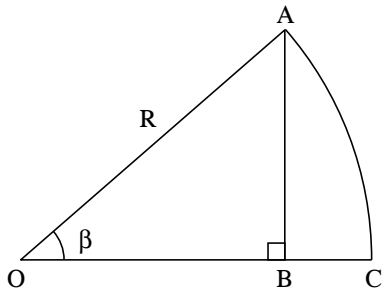
$S = \frac{ab}{2}\text{sen}\alpha$

Problemas resueltos

1. La figura muestra un sector circular AOB de radio R. Halle AB.



Resolución

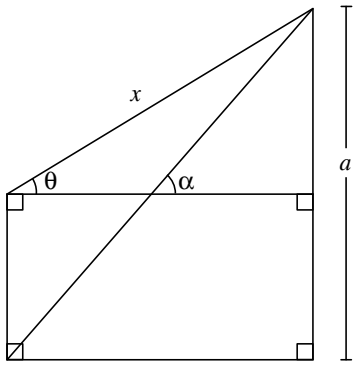


◺ AOB: $\frac{AB}{R} = \text{sen}\beta$

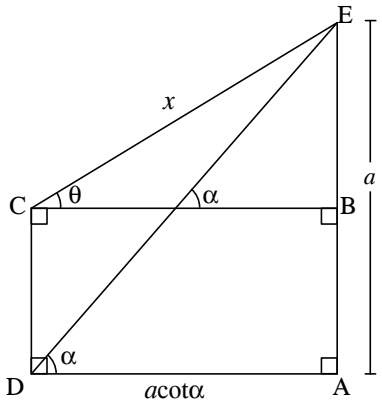
$AB = R\ \text{sen}\beta$

Rpta.: R senβ

2. Del gráfico, halle el valor de x en función de a, α, y θ.



Resolución



- ◺DAE: $\frac{DA}{a} = \cot\alpha \rightarrow DA = a\cot\alpha$

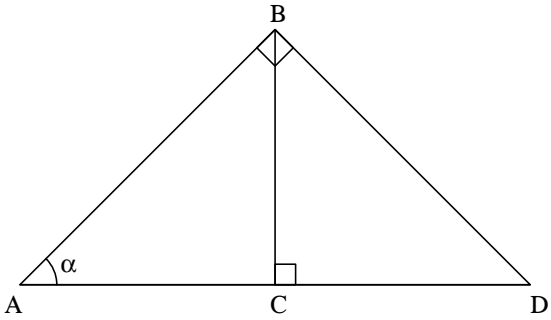
  $BC = DA = a\cot\alpha$

- ◺CBE: $\frac{CE}{BC} = \sec\theta \rightarrow \frac{x}{a\cot\alpha} = \sec\theta$

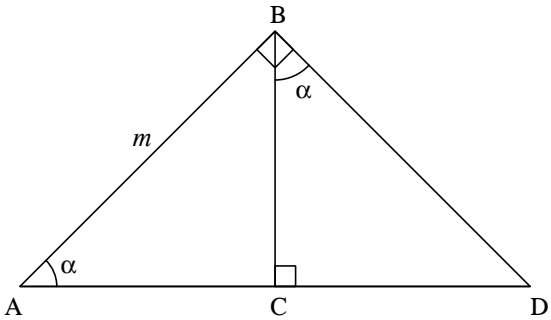
  $\therefore\ x = a\cot\alpha \cdot \sec\theta$

Rpta.: $a\cot\alpha \cdot \sec\theta$

3. En el gráfico, halle CD si AB=m.



Resolución



◿ ABC: $\frac{BC}{m} = \text{sen}\alpha$

$BC = m\text{sen}\alpha$

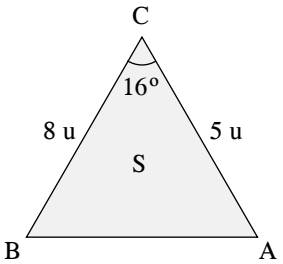
◿ BCD: $\frac{CD}{BC} = \tan\alpha$

$\frac{CD}{m\text{sen}\alpha} = \tan\alpha$

$CD = m\text{sen}\alpha \cdot \tan\alpha$

Rpta.: $m\text{sen}\alpha \cdot \tan\alpha$

4. Calcule el área de una región triangular ABC si AC = 5 u, BC = 8 u y m ∢ BCA = 16º.



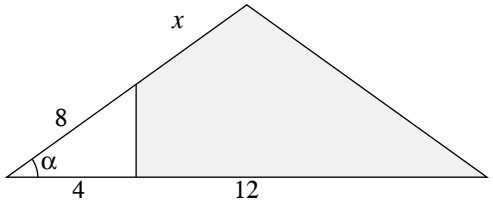
Resolución

$$S = \frac{(8\text{ u})(5\text{ u})}{2} \cdot \text{sen}16°$$

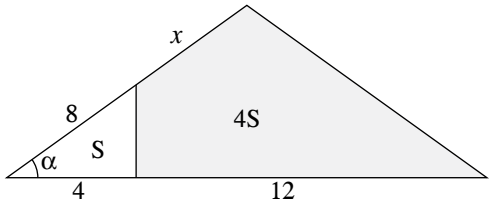
$$\therefore\ S = \frac{28}{5}\text{ u}^2.$$

Rpta.: $\frac{28}{5}$ u^2

5. En la figura, el área de la región sombreada es cuatro veces el área de la región no sombreada. Halle el valor de x.



Resolución



$$\frac{5\cancel{8}}{\cancel{8}} = \frac{(8+x)\cdot \overset{1}{\cancel{8}}\cdot \cancel{\text{sen}\alpha}}{\underset{2}{\cancel{16}}\cdot \cancel{\text{sen}\alpha}}$$

$$10 = 8 + x$$

$$\therefore\ 2 = x$$

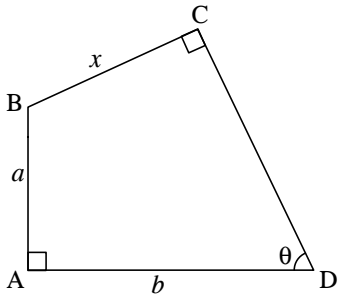
Rpta.: 2

Helicopráctica

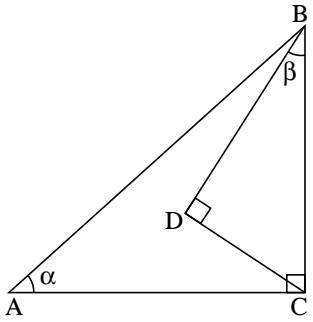
1. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide m y un ángulo agudo es θ. Calcule el área de dicho triángulo.

2. Juan y Jorge compran un terreno rectangular para sembrar camote y papa, para ello dividen el terreno en dos partes iguales, trazando una diagonal. Si el ancho del terreno es L metros y el ángulo del terreno es β, calcule el área del terreno que le corresponde para sembrar cada tubérculo en términos de L y β.

3. De la figura, determine el valor de x en función de a, b y θ.

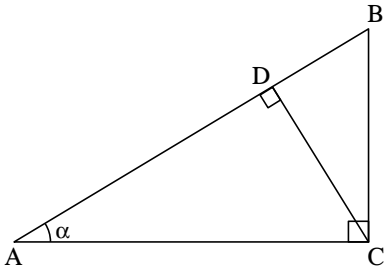


4. A partir del gráfico, si AB=h, halle CD.

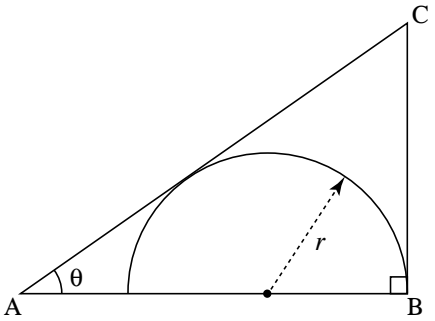


5. En un triángulo acutángulo ABC, se traza la altura $\overline{CD}$ (D en $\overline{AB}$). Si m∢CAD=α, m∢CBD=β y AD=p, halle BD.

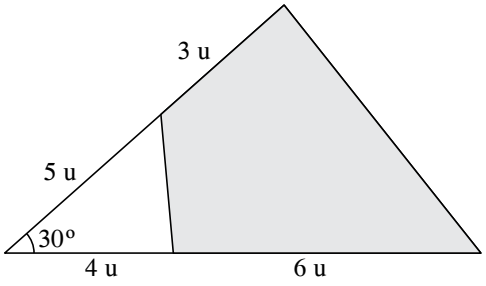
6. Halle AD en términos de α y m si AB = m.



7. En el gráfico mostrado, halle AB en términos de r y θ.



8. En el gráfico, calcule el área de la región sombreada.



Helicotaller

Nivel I

1. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide h y un ángulo agudo es θ. Determine la suma de los catetos de dicho triángulo.

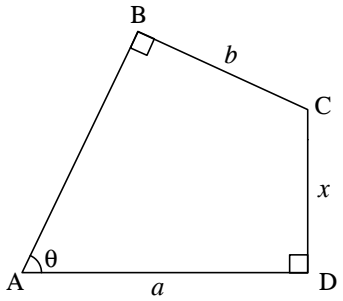
Resolución

2. Dos hermanos compran un terreno rectangular de L metros de largo y por una disputa entre los dos deciden dividirse el terreno trazando una diagonal. Si el ángulo formado por la línea diagonal del largo del terreno es α, calcule el perímetro del terreno rectangular en términos de L y α.

Resolución

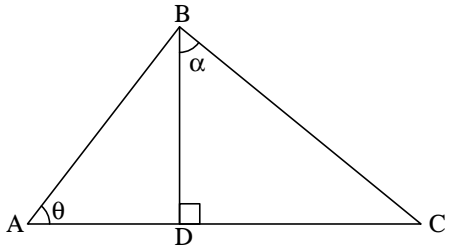
Nivel II

3. Determine el valor de x en términos de a y b en el gráfico mostrado.



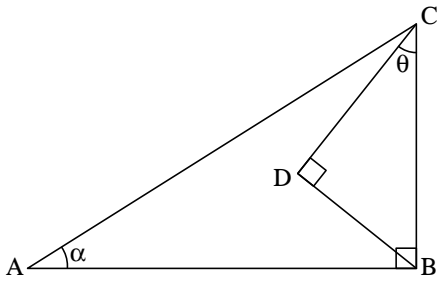
Resolución

4. A partir del gráfico, si AB = m, halle CD en términos de α, θ y m.



Resolución

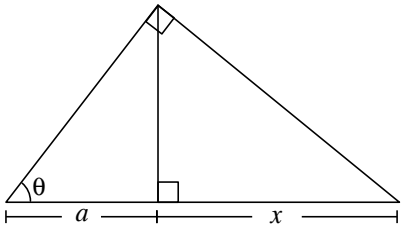
5. A partir del gráfico, si AB = h, halle CD en términos de α, θ y h.



Resolución

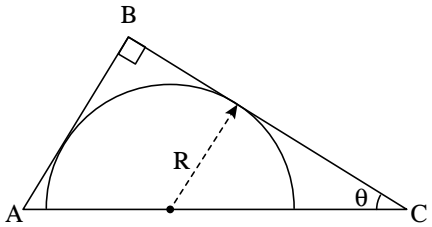
Nivel III

6. Determine el valor de x en función de a y θ.



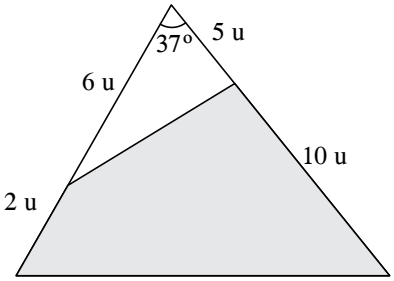
Resolución

7. Del gráfico mostrado, halle AC en términos de R y θ.



Resolución

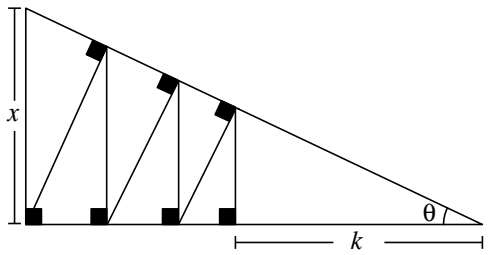
8. Del gráfico mostrado, calcule el área de la región sombreada.



Resolución

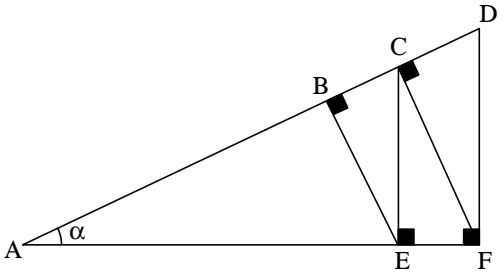
Helicodesafío

1. En la figura, determine el valor de x en función de k y θ. (Examen de Admisión UNMSM 2003)



A) $k\sec^5\theta\cdot\text{sen}\theta$
B) $k\tan\theta\cdot\cos^6\theta$
C) $k\sec^6\theta\cdot\tan\theta$
D) $k\sec^5\theta\cdot\cos\theta$
E) $k\cot^5\theta\cdot\sec^7\theta$

2. En la figura, EF = 2 cm. Determine BC en función de α. (Examen de Admisión UNMSM 2009-I)



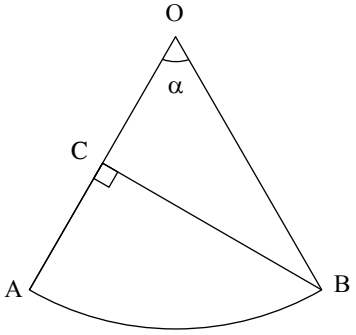
A) 2cosα cm
B) 2cotα cm
C) 2senα cm
D) 2tanα cm
E) 2secα cm

Helicorreto

1. En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide α y su cateto opuesto mide m. Determine la longitud de la hipotenusa.

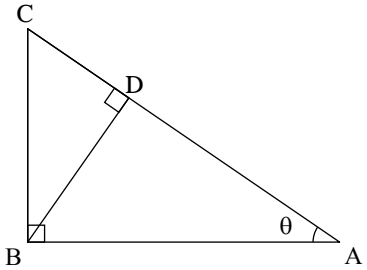
A) $m\,\text{sen}\alpha$ B) $m\csc\alpha$ C) $m\tan\alpha$
D) $m\cos\alpha$ E) $m\sec\alpha$

2. La figura muestra un sector circular AOB de radio r. Determine AC.



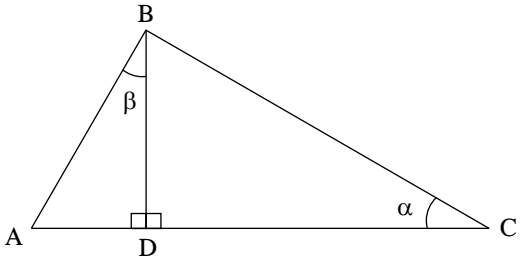
A) $r\,\text{sen}\alpha$
B) $r(1-\text{sen}\alpha)$
C) $r\tan\alpha$
D) $r\cos\alpha$
E) $r(1-\cos\alpha)$

3. En el gráfico, determine BD si AC$=m$.



A) $m\,\text{sen}\theta$ B) $m\cos\theta$ C) $m\,\text{sen}^2\theta$
D) $m\cos^2\theta$ E) $m\,\text{sen}\theta\cdot\cos\theta$

4. En el gráfico, Si AB $= a$, halle CD en términos de α, β y a.



A) $a\cos\beta\cdot\cot\alpha$ B) $a\,\text{sen}^2\alpha$
C) $a\cos\beta\cdot\tan\alpha$ D) $a\cos\beta$
E) $a\,\text{sen}\beta\cdot\cos\alpha$

5. En un triángulo ABC se cumple AC$=4$u, BC$=2\sqrt{3}$u y m$\measuredangle$ACB$=60°$. Calcule el área de la región triangular.

A) 4 u^2 B) $4\sqrt{3}$ u^2 C) 6 u^2
D) 8 u^2 E) $6\sqrt{3}$ u^2

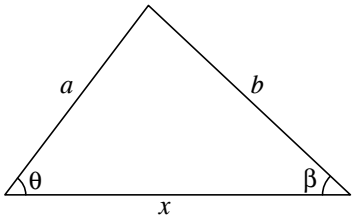
Helicotarea

Nivel I

1. Determine el perímetro de un triángulo rectángulo si uno de sus ángulos mide θ y su cateto adyacente es a.

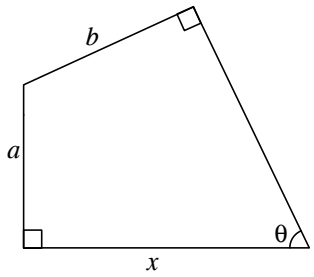
A) $a(1+\text{sen}\theta+\cos\theta)$
B) $a(\text{sen}\theta+\cos\theta)$
C) $a(1+\sec\theta+\tan\theta)$
D) $a(\sec\theta+\cot\theta)$
E) $a(1+\csc\theta+\cot\theta)$

2. Determine el valor de x en términos de a, b, θ y β, en el gráfico mostrado.



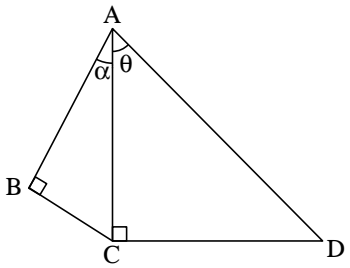
A) $a\,\text{sen}\theta + b\cos\beta$ B) $a\cos\theta + b\cos\beta$
C) $a\,\text{sen}\theta - b\cos\beta$ D) $a\tan\theta + b\cot\beta$
E) $a\cot\theta + b\cot\beta$

3. Determine el valor de x en términos de a, b y θ en el gráfico mostrado.



A) $a\sec\theta + b\tan\theta$
B) $a\csc\theta + b\cot\theta$
C) $a(\text{sen}\theta + \cos\theta)$
D) $a\cot\theta + b\csc\theta$
E) $a\text{sen}\theta + b\tan\theta$

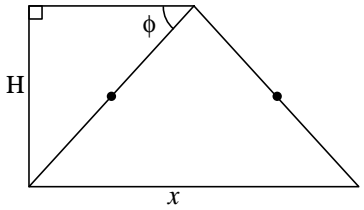
4. En el gráfico, BC$=m$. Determine AD en función de α, θ y m.



A) $m\sec\alpha\cdot\csc\theta$
B) $m\cot\theta\cdot\csc\alpha$
C) $m\sec\theta\cdot\sec\alpha$
D) $m\cot\alpha\cdot\csc\theta$
E) $m\sec\theta\cdot\csc\alpha$

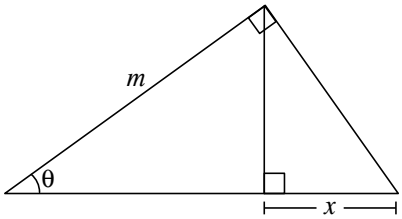
Nivel II

5. De la figura, determine el valor de x en términos de ϕ y H.



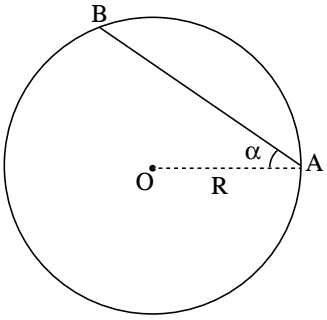
A) $3H\cot\phi$
B) $2H\cot\phi$
C) $H\cot\phi$
D) $4H\cot\phi$
E) $5H\cot\phi$

6. De la figura, determine el valor de x en términos de m y θ.



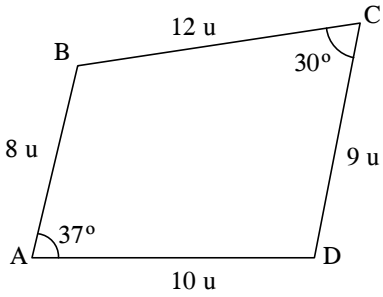
A) $m\text{sen}^2\theta$
B) $m\text{sen}\theta\cdot\tan\theta$
C) $m\cos^2\theta$
D) $m\tan\theta$
E) $m\cos\theta\cdot\cot\theta$

7. Si R es el radio de la circunferencia mostrada, determine la longitud de la cuerda $\overline{AB}$.



A) $2R\text{sen}\alpha$
B) $R\text{sen}\alpha$
C) $R\tan\alpha$
D) $2R\cos\alpha$
E) $R\cos\alpha$

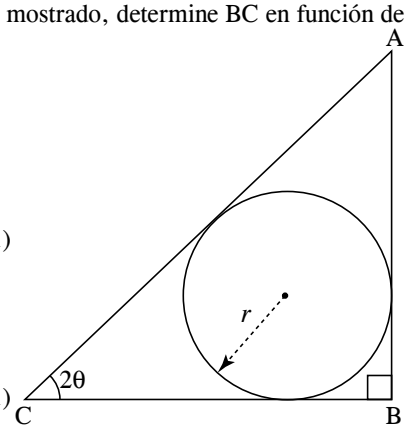
8. Calcule el área del cuadrilátero mostrado.



A) 27 u^2
B) 30 u^2
C) 51 u^2
D) 38 u^2
E) 24 u^2

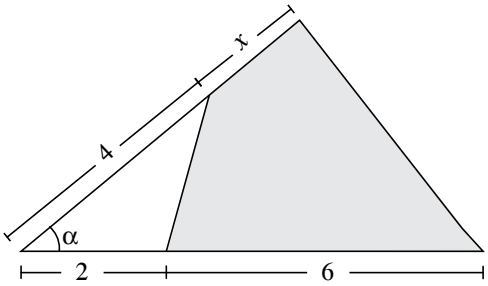
Nivel III

9. En el gráfico mostrado, determine BC en función de r y θ.



A) $r\tan\theta$
B) $r(\tan\theta+1)$
C) $r\sec\theta$
D) $r\cot\theta$
E) $r(\cot\theta+1)$

10. En la figura, el área de la región sombreada es cuatro veces el área de la región no sombreada. Halle el valor de x.



A) 0,5
B) 1
C) 1,5
D) 2
E) 2,5